FE DE ERRATA

GUIA DE EJERCICIOS _SERIE Y SUCESION_ CON SOLUCIONES

En la guía mencionada anteriormente he encontrado varios errores en la tipografía de los ejercicios, favor las personas que descargaron la guía arreglar los mismo. Estos errores se mencionan a continuación.

# Pagina	Problema #	Letra	Que dice	Que debería
1	1	--	*Enunciado:* Describa los primeros seis términos de las sucesiones que se presentan a continuación y determine su límite en caso posible.	
3	1	**d**	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k+5)k}$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k+2)k}$
3	2	----	$-\ln(-2)$	$= -\ln(2)$
14	Cap 7	**Pre 1 (a)**	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\, x^{n-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, n\, x^{n-1}$
14	Cap 7	**Pre 1 (b)**	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\, x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, n\, x^n$
14	Cap 7	**Pre 1 (d)**	$\frac{x^3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^3}{2}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^3}{2}\right)^n$
14	Cap 6	**Pre1 (c)**	Converge para $(-1,1)$ en los extremos diverge	Converge para $[-1,1]$ en los extremo también converge

GUIA DE EJERCICIOS MATEMATICAS 4

TEORIA Y PRÁCTICA

"SERIES Y SUCESIONES"

CAPITULO 1

Sucesiones Infinitas.

TEORIA.

Definición. La sucesión $\{a_n\}$ converge a L y se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ si para cada número positivo ε hay un numero positivo correspondiente N tal que $n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$ Si no hay un numero finito L al que converja una sucesión, se dice que esta diverge o que es divergente.

SE CUMPLEN LAS MISMAS PROPIEDADES DE LOS LIMITES EN MATEMATICAS 1. REVISARLAS.

Teorema: "Teorema del emparedado" Supóngase que $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$ convergen a L y que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq K$. Entonces $\{b_n\}$ también converge a L.

Teorema: Si $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Teorema: Si U es una cota superior para una sucesión no decreciente $\{a_n\}$, entonces la sucesión converge a un límite A que es menor o igual a U. De manera análoga, si L es una cota inferior para una sucesión no creciente $\{b_n\}$, entonces la sucesión $\{b_n\}$ converge a un límite que es menor o igual a L.

EJERCICIOS[1].

1.- Describa los primeros seis términos de las sucesiones que se presentan a continuación.

a.- $a_n = \frac{n}{3n-1}$ b.- $a_n = \frac{3n^2+2}{2n-1}$ c.- $a_n = (-1)^n\left(\frac{n}{n+2}\right)$

d.- $\frac{e^{2n}}{n^2+3n-1}$ e.- $a_n = e^{-n}\sin(n)$ f.- $a_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$

g.- $a_n = \frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{2n}}$ h.- $a_n = (2n)^{\frac{1}{2n}}$

[1] Se recomienda al estudiante realizar este tipo de ejercicios para saber cómo escribir la expresión general de la sucesión y así asociarla a las sucesiones que se estudiaran mas adelantes.

2.- Describa una formula explicita para las sucesión que se da a continuación.

a.- $\frac{1}{2^2}\ \frac{2}{2^3}\ \frac{3}{2^4}\ \frac{4}{2^5}$ b.- $1, \frac{1}{1-\frac{1}{2}}, \frac{1}{1-\frac{2}{3}}, \frac{1}{1-\frac{3}{4}}$

c.- $\frac{1}{2-\frac{1}{2}}, \frac{2}{3-\frac{1}{3}}, \frac{3}{4-\frac{1}{4}}, \frac{4}{5-\frac{1}{5}}$ d.- $2,1, \frac{2^3}{3^2}, \frac{2^4}{4^2}, \frac{2^5}{5^2}$

3.- Use la definición de límite para mostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n^2+1)} = 1$

CAPITULO 2
Series Infinitas.

TEORIA.

Definición: La serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y tiene suma S si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge a S. Si $\{S_n\}$ diverge, entonces la serie diverge. Una serie divergente no tiene suma.

[2]**Teorema:** *"Criterio del n-ésimo termino para la divergencia"* Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. En forma equivalente, si$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ o si no existe el límite entonces la serie diverge.

Teorema: Linealidad de las series convergentes.

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen y c es una constante, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ también convergen y

a.- $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

b.- $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Teorema: Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge y $c \neq 0$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ diverge.

Teorema: "*Agrupación de términos en una serie infinita*" Los términos de una serie convergente se pueden agrupar de cualquier manera (siempre que el orden de los términos se mantenga) y la nueva serie convergerá a la misma suma que la serie original.

EJERCICIOS.

1.- Determine si las siguientes series converge o divergen, en caso de convergencia determine la suma.

---

[2] A partir de ahora se comienza a introducir diferentes teoremas para determinar si una serie converge o diverge. Deben manejar bien las hipótesis como también sus resultados.

a.- $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{-k-2}$ b.- $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-5}{k+2}$

c.- $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{9}{8}\right)^{k}$ d.- $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k+5)k}$

e.- $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{k}$ f.- $\sum_{k=6}^{\infty}\frac{2}{k-5}$

2.- Muestre que $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ diverge.

3.- Muestre que $\sum_{k=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=-\ln(-2)$

4.- Determine la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{(2^{k+1}-1)(2^k-1)}$$

SERIES IMPORTANTES.

SERIE GEOMETRICA. SUMA

$$\sum_{k=0}^{\infty}a(r^k) \qquad S=\frac{a}{1-r}$$

SERIES TELESCOPICA

En las series telescópica son de forma fraccionales, para ello separe la fracción en fracciones simples y determine una nueva expresión para la serie de manera que pueda obtener la suma[3]

CAPITULO 3

Series a Términos positivos; Criterio de la Integral.

TEORIA.

Teorema: "Criterio de la suma acotada" Una serie $\sum a_k$ de términos no negativos converge si y solo si sus sumas parciales están acotadas por arriba.

[3] Véase el ejemplo Purcell y Varberg Octava Edición ejemplo 6 pág. 438.

[4]**Teorema**: "Criterio de la integral" Sea f una *función continua, positiva, no creciente* (decreciente), definida en el intervalo $[1, \infty)$ y suponga que $a_k = f(k)$ para todo entero positivo k. Entonces la serie infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Converge si y solo si la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

Converge.

EJERCICIOS.

1.- Utilice el criterio de la integral para determinar si la serie converge o diverge las siguientes series.

a.- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2k^2+1}$ b.- $\sum_{k=100}^{\infty} \frac{3}{(k+2)^2}$

c.- $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1000}{k(\ln(k))^2}$ d.- $\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{\sqrt{k+2}}$

e.- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(4+3k)^{\frac{7}{6}}}$ f.- $\sum_{k=1}^{\infty} k\, e^{-3k^2}$

2.- Determine si la serie converge o diverge utilizando cualquiera de los criterios antes vistos.

a.- $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ b.- $\sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(\frac{1}{k}\right)$

c.- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ d.- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2^k}\right)$

CRITERIO DE SERIE "p"

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

Esta serie cumple con $\begin{cases} La\ serie\ p\ converge\ si\ \ p > 1 \\ La\ serie\ p\ diverge\ si\ p \leq 1 \end{cases}$

[4] Se recomienda para el uso de este teorema demostrar las tres hipótesis que se requiere de manera de garantizar la relación con la integral impropia. Así mismo el estudiante debe recordar cómo resolver integrales impropias de Matemáticas 2.

CAPITULO 4

Series a Términos positivos; otros criterios.

TEORIA.

Teorema: "*Criterio de comparación ordinaria*" Suponga que $0 \leq a_n \leq b_n$ para $n \geq N$.

(a) Si $\sum b_n$ converge, también $\sum a_n$
(b) Si $\sum a_n$ diverge, también $\sum b_n$

[5]**Teorema:** *"Criterio de comparación del límite"* Suponga que $a_n \geq 0, b_n > 0$ y que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Entonces $0 < L < \infty$ entonces $\sum b_n$, $\sum a_n$ convergen o divergen juntas. Si L=0 y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

[6]**Teorema**: *"Criterio del cociente"* Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y supóngase que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$$

(i) Si $p < 1$ la serie converge.
(ii) Si $p > 1$ o si no existe el límite, la serie diverge.
(iii) Si p=1, el criterio no es concluyente.

[7]**Teorema:** "Criterio de la raíz n-ésima" Sea $a_n > 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$$

(i) Si $r < 1$ la serie converge.
(ii) Si $r > 1$ o si no existe el límite, la serie diverge.
(iii) Si r=1, el criterio no es concluyente.

EJERCICIOS.

1.- Determine si la serie converge o diverge. Utilice alguno de los criterios hasta ahora estudiados.

a.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3-4}$ b.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n^2}$

[5] Este criterio es útil para determinar si la serie converge o diverge siempre y cuando se cumplan las condiciones del teorema y sus resultados.
[6] El criterio del cociente representa una herramienta para determinar la convergencia de series donde se haga presente funciones tales como $n!$ r^n n^n
[7] El criterio de la raíz n-ésima se utiliza para eliminar el termino potencial n de funciones.

c.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$ d.- $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

e.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$ f.- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k+k}{k!}$

g.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{2^n}$ h.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n}$

i.- $\frac{2}{1.3.4} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{4}{3.5.6} + \frac{5}{4.6.7} + \cdots$

j.- $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \cdots$

k.- $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

2.- Sea $a_n > 0$ y suponga que $\sum a_n$ converge. Demuestre que $\sum a_n^2$ converge.

3.- Compruebe la convergencia o divergencia usando el criterio de la raíz.

a.- $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^n$ b.- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$

c.- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$

4.- Compruebe la convergencia o divergencia.

a.- $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ b.- $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

c.- $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

RESUMEN.

Para verificar la convergencia o divergencia de una serie $\sum a_n$ con términos positivos, observe con cuidado a_n.

1.- Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, concluya del criterio del n-ésimo término que la serie diverge.

2.- Si a_n implica a $n!, r^n o\ n^n$ trate de usar el criterio del cociente.

3.- Si a_n implica solo potencias constantes de n, trate de usar el criterio de comparación del límite. En particular, si a_n es una expresión racional en n, use el criterio con b_n como el cociente de los términos principales del numerador y el denominador.

4.- Si ninguno de esto funciona, pruebe con los criterios de comparación ordinaria, integral.

5.- Algunas series requiero un tratamiento mucho mayor para determinar su convergencia o divergencia.

CAPITULO 5

Series alternantes, convergencia absoluta y convergencia condicional.

TEORIA.

Teorema: "Criterio de la serie alternante" Sea una serie alternante con $a_n > a_{n+1} > 0$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie converge. Además, el error cometido al usar la suma S de los primeros n términos para aproximar la suma S de la serie no es mayor que a_{n+1}.

Teorema: "Criterio de convergencia absoluta" Si $\sum |a_n|$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

Una serie *converge absolutamente* si se cumple el teorema anterior.

Teorema: "Criterio del cociente absoluto" Sea $\sum a_n$ una serie de términos no nulos y suponga que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = p$$

(i) Si $p < 1$ la serie converge.
(ii) Si $p > 1$ o si no existe el límite, la serie diverge.
(iii) Si p=1, el criterio no es concluyente.

Una serie *converge condicionalmente* si la serie converge pero la serie de los valores absolutos diverge.

Teorema: "Teorema de reordenamiento" Los términos de una serie absolutamente convergente pueden reordenarse sin afectar la convergencia o la suma de la serie.

EJERCICIOS[8].

1.- Determine la convergencia absoluta o condicional de las series.

a.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\sqrt{n}}$ b.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n^2}{e^n}$ c.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$

d.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{5n^{1.1}}$ e.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{10n^{1.1}+1}$ f.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{n(1+\sqrt{n})}$

g.- $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ h.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n-1}{n}$ i.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}$

j.- $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ k.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n^4}{2^n}$ l.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{n^2}$

m.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ n.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

[8] Para determinar la convergencia absoluta o condicional de las series es recomendable primero realizar la serie del valor absoluto y después criterio del cociente.

CAPITULO 6

Series de potencias.

TEORIA.

Teorema: El conjunto de convergencia de una serie de potencias $\sum a_n x^n$ es siempre un intervalo de uno de los siguientes tres tipos:

(i) El único punto x=0

(ii) Un intervalo (-R, R), incluyendo posiblemente a uno o ambos extremos.

(iii) Toda recta real.

En (i) (ii) (iii) se dice que la serie tiene radio de convergencia 0, R e ∞, respectivamente.

Teorema: Una serie de potencia $\sum a_n x^n$ converge absolutamente en el interior de su intervalo de convergencia.

EJERCICIOS.

1.-Determine el radio de convergencia para las siguientes series[9].

a.- $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ b.- $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8} - \frac{x^{10}}{10} + \cdots$

c.- $x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \cdots$ d.- $1 + x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \frac{x^4}{\sqrt{4}} + \frac{x^5}{\sqrt{5}} + \cdots$

e.- $1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^4 + \cdots$ f.- $1 + (x+2) + \frac{(x+2)^2}{2!} + \frac{(x+2)^3}{3!} + \cdots$

g.- $\frac{x-2}{1^2} + \frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(x-2)^3}{3^2} + \frac{(x-2)^4}{4^2} + \cdots$

h.- $(x+3) - 2(x+3)^2 + 3(x+3)^3 - 4(x+3)^4 + \cdots$

2.- Demuestre la suma S(x) de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$. ¿Cuál es el conjunto de convergencia?

CAPITULO 7

Operaciones sobre series de potencias.

TEORIA.

En esta sección se estudiara diferentes operaciones que se pueden utilizar en las series para así determinar funciones asociadas a desarrollo de series.

[9] Para determinar el radio de convergencia es útil emplear el criterio del cociente.

[10]**Teorema:** Suponga que S es la suma de una serie de potencias en un intervalo I; entonces, si x es interior de I.

(i) $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Dx(a_n x^n)$

(ii) $\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt$

Teorema: Sea $f(x) = \sum a_n x^n \ y \ g(x) = \sum b_n x^n$, donde ambas series convergen al menos para $|x| < r$. Si se realiza las operaciones de suma, resta y multiplicación en estas series como si fuesen polinomios, entonces la serie resultante convergerá para $|x| < r$.

FUNCIONES CON SU DESARROLLO EN SERIE.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \qquad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

EJERCICIOS.

1.- Especifique el radio de convergencia y el desarrollo de serie para los ejercicios siguientes.

a.- $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ b.- $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ c.- $f(x) = \frac{1}{3+2x}$

d.- $f(x) = \frac{x^3}{2-x^3}$ e.- $f(x) = \int_0^x \tan^{-1} t \, dt$

2.- Determine la suma de cada una de las siguientes series.

a.- $x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - \cdots$

b.- $\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \cdots$

c.- $2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + \frac{16x^4}{4} + \cdots$

3.- Determine la suma de $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$

[10] Este teorema proporciona una herramienta de gran utilidad para poder determinar relaciones de funciones con desarrollos de series como también la relación de una función básica con respectos a sus derivadas o integrales.

CAPITULO 8

Serie de Taylor y McLaurin.

TEORIA.

Teorema: "Teorema de Taylor" Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en algún intervalo $(a-r, a+r)$. La serie de Taylor

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}\ (x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

Representa a la función f en el intervalo $(a-r, a+r)$ y solo si

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

Donde $R_n(x)$ es el residuo en la formula de Taylor.

$$R_n(x)=\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Y c es algún punto en el interior del intervalo.

NOTA: Si $a=0$ entonces se hace presencia de la serie de McLaurin.

EJERCICIOS.

1.- Determine los primeros 5 términos de las siguientes funciones.

a.- $f(x)=\tanh(x)$ b.- $f(x)=e^{-x}\cos(x)$

c.- $f(x)=(\cos(x))\ln(1+x)$ d.- $f(x)=(\sin(x))\sqrt{1+x}$

e.- $f(x)=\frac{\left(\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}$ f.- $f(x)=\frac{1}{1-\sin(x)}$

g.- $f(x)=x(\sin(2x)+\sin(3x))$ h.- $f(x)=(1-x^2)^{\frac{2}{3}}$

2.- Determine la serie de Taylor hasta el tercer término.

a.- $\sin(x)$, $a=\frac{\pi}{6}$ b.- $\tan(x)$, $a=\frac{\pi}{4}$

c.- $1+x^2+x^3$, $a=1$ d.- $2-x+3x^2-x^3$, $a=-1$

3.- Determine la serie de McLaurin para las funciones dadas.

a.- $f(x) = e^{x+x^2}$ b.- $f(x) = e^{\sin(x)}$

c.- $f(x) = \int_0^x \frac{e^{t^2}-1}{t^2}\,dt$ d.- $f(x) = e.\,e^{\cos(x)-1}$

e.- $f(x) = \ln\left(\cos^2(x)\right)$

CAPITULO 9

REVISION.

EJERCICIOS.

1.- Determine si la serie converge o diverge, para el caso de las series alternantes determine si converge condicionalmente o absolutamente.

a.- $a_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ b.- $a_n = \frac{n!}{3^n}$ c.- $a_n = \frac{\sin^2(n)}{\sqrt{n}}$

d.- $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$ e.- $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ f.- $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

g.- $\sum_{k=0}^{\infty}\cos(k\pi)$ h.- $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2^k} + \frac{4}{3^k}\right)$ i.- $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{ln2}\right)^k$

j.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{1+n^3}$ k.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$ l.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n}$

m.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3 3^n}{(n+1)!}$ n.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\ln(n)}$ o.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{2^n}$

p.- $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}$

2.- Determine el radio de convergencia.

a.- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^3+1}$ b.- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}x^n}{2n+3}$ c.- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-4)^n}{n+1}$

d.- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^{3n}}{(3n)!}$ e.- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n+1}$ f.- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(x+1)^n}{3^n}$

CAPITULO 10

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS.

Capitulo 1

PREGUNTA 1.

a.- $\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{3}{8},\frac{4}{11},\frac{5}{14}$ b.- $5,\frac{14}{3},\frac{29}{5},\frac{50}{7},\frac{77}{9}$

c.- $-\frac{1}{3},\frac{2}{4},-\frac{3}{5},\frac{2}{3},-\frac{5}{7}$

d.- $\frac{e^2}{3},\frac{e^4}{9},\frac{e^6}{17},\frac{e^8}{27},\frac{e^{10}}{39}$

e.- $e^{-1}sin1, e^{-2}sin2, e^{-3}sin3, e^{-4}sin4$

f.- $\frac{ln1}{\sqrt{1}},\frac{ln2}{\sqrt{2}},\frac{ln3}{\sqrt{3}},\frac{ln4}{\sqrt{4}},\frac{ln5}{\sqrt{5}}$

g.- $0,-\frac{ln2}{2},-\frac{ln3}{\sqrt{6}},-\frac{ln4}{2\sqrt{2}},-\frac{ln5}{\sqrt{10}}$

h.- $2^{\frac{1}{2}},4^{\frac{1}{4}},6^{\frac{1}{6}},8^{\frac{1}{8}},10^{\frac{1}{10}}$

PREGUNTA 2.

a.- $a_n=\frac{n}{2^{n+1}}$ b.- $a_n=\frac{1}{1-\frac{n-1}{n}}$

c.- $a_n=\frac{n^2+n}{n^2+2n}$ d.- $\frac{2^n}{n^2}$

PREGUNTA 3.

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\left|-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{(n+1)}<\varepsilon$$

Lo cual es lo mismo a $\frac{1}{\varepsilon}<n+1$.

Para cualquier épsilon positivo se elige

$N>\frac{1}{\varepsilon}-1$ luego

$$n\geq N \ \ => \ \left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$$

Para $n>0$, se tiene que

$$\left|\frac{n}{n^2+1}\right|=\frac{n}{n^2+1}.\frac{n}{n^2+1}<\varepsilon$$

Es lo mismo que $\left|\frac{n^2+1}{n}\right|=n+\frac{1}{n}>\frac{1}{\varepsilon}$

Es suficiente con tomar $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Así que para $\varepsilon>0$ se elige $N>\frac{1}{\varepsilon}$ luego

$n\geq N \ \ => \ \left|\frac{n}{n^2+1}\right|<\varepsilon$

Capitulo 2

PREGUNTA 1.

a.- Serie Geométrica con r=-4. Diverge

b.- Criterio n-ésimo termino. Diverge.

c.- Serie geométrica r=9/8. Diverge.

d.- Serie telescópica, converge. S=3/2

e.- Serie armónica, diverge.

f.- Serie armónica diverge.

PREGUNTA 2.

$\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)=\ln k \ -\ln(k+1)=$
$-\ln(k+1)$.

Aplicando límite. Diverge

PREGUNTA 3.

$\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=-\ln(2)+\ln\frac{(k+1)}{n}$
aplicando límite. Se tiene $=-\ln 2$

PREGUNTA 4.

Determine la fracciones simples y obtenga este resultado $1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$ por lo cual S=1

Capitulo 3

PREGUNTA 1.

DEMUESTRE LAS HIPOTESIS DEL TEOREMA. (Continua, Positiva Decreciente)

a.- Integración= $\frac{3}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \sqrt{2}x$. CONVERGE.

b.- Integración $= -\frac{3}{x+2}$. CONVERGE.

c.- Integración $= -\frac{1000}{\ln(x)}$. CONVERGE.

d.- Integración $= 4\sqrt{x+2}$. DIVERGE

e.- Integración $= -\frac{6}{(4+3x)^{\frac{1}{6}}}$. CONVERGE.

f.- Integración $= -\frac{1}{6}e^{-3x^2}$. CONVERGE.

PREGUNTA 2.

a.- Limite de valor absoluto no existe. DIVERGE.

b.- Limite=1, DIVERGE.

c.- Serie telescópicas. CONVERGE. S=1

d.- Separar las series. Suma de series CONVERGE.

Capitulo 4

PREGUNTA 1.

a.- Comparación de límite $b_n = \frac{1}{n^2}$. CONVERGE.

b.- Comparación de límite $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

CONVERGE.

c.- Criterio del cociente. DIVERGE.

d.- Criterio del cociente. CONVERGE.

e.- Criterio del cociente. CONVERGE.

f.- Criterio del cociente. CONVERGE.

g.- Criterio del cociente. CONVERGE.

h.- Criterio del cociente. CONVERGE.

i.- Sucesión $a_n = \frac{n+1}{n^3+5n^2+6n}$. Comparación de límite $b_n = \frac{1}{n^2}$. CONVERGE.

j.- Sucesión $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Criterio de la integral. CONVERGE.

k.- Criterio del n-ésimo termino. Tomar neperiano para bajar la potencia, luego determinar el límite de la función $= e^{-1}$. Diferente de cero DIVERGE.

PREGUNTA 2

Ya que $\sum a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Por lo tanto existe alguna N positiva tal que $0 < a_n < 1$ para todo $n \geq N$. Se tiene que $a_n < 1 \; => \; a^2{}_n < a_n$ por lo cual $\sum a^2{}_n < \sum a_n$. Entonces $\sum a^2{}_n$ converge.

PREGUNTA 3.

a.- CONVERGE.

b.- CONVERGE.

c.- CONVERGE.

PREGUNTA 4.

a.- Comparación de limites $b_n = \frac{1}{n^2}$ CONVERGE.

b.- Comparación de límite. $b_n = \frac{1}{n}$

DIVERGE

c.- Multiplicar por conjugado del numerador y $\frac{\sqrt{n}\sin^2\frac{1}{n}}{1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$ lo cual es menor que $\sqrt{n}\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$

A esta nueva función. Criterio de comparación de límite. $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Converge. Por criterio de comparación termino a termino CONVERGE.

Capitulo 5

PREGUNTA 1

a.- CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

b.- CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

c.- CONVERGE ABSOLUTAMENTE

d.- CONVERGE ABSOLUTAMENTE

e.- Serie alternante converge, pero la serie comparando con límite

$b_n = \frac{1}{n^{0.1}}$ Diverge. CONVERGE CONDICIONALEMENTE.

f.- CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

Criterio de comparación termino a término $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$

g.- CONVERGE CONDICIONALMENTE.

h.- DIVERGE.

i.- La serie es igual $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$ ¿Por qué? CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

j.- DIVERGE.

k.- CONVERGE ABSOLUTAMENTE

l.- DIVERGE.

m.- CONVERGE CONDICIONALMENTE.

n.- CONVERGE CONDICIONALMENTE.

Capitulo 6

PREGUNTA 1

a.- Converge para todo x

b.- Converge para $(-1,1)$ en los extremos la serie diverge.

c.- Converge para $(-1,1)$ en los extremos la serie diverge.

d.- Converge para $[-1,1)$ en 1 la serie diverge.

e.- Converge para $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ en los extremos la serie diverge.

f.- Converge para toda x.

g.- Converge para $[1,3]$

h.- Converge para $(-4,-2)$

PREGUNTA 2

Converge para un intervalo $(3-a, 3+a)$

Capitulo 7

PREGUNTA 1

a.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}$ radio $=1$

b.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^n$ radio $=1$

c.- $\frac{1}{3}.\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}x\right)^n$ radio $=\frac{3}{2}$

d.- $\frac{x^3}{2}.\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^3}{2})^n$ radio $\left(-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right)$

e.- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ \frac{x^{2n}}{2n.(2n-1)}$ radio $=1$

PREGUNTA 2

a.- $S = \frac{x}{1+x}$

b.- $S = \frac{e^x-(1+x)}{x^2}$ c.- $S = -\ln(1-2x)$

PREGUNTA 3

Derive la serie geométrica dos veces y multiplique por (x) lo cual da.

$$S = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

Capitulo 8

PREGUNTA 1

a.- $x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{30}$

b.- $1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{30}$

c.- $x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40}$

d.- $x + \frac{x^2}{2} - \frac{7x^3}{24} - \frac{x^4}{48} - \frac{19x^5}{1920}$

e.- $\frac{1}{4!} - \frac{x^2}{6!} + \frac{x^4}{8!}$

f.- $1 + x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{2x^4}{3} + \frac{61x^5}{120}$

g.- $5x^2 - \frac{35x^4}{3!}$

h.- $1 - \frac{2x^2}{3} - \frac{x^4}{9}$

PREGUNTA 2

a.- $\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3$

b.- $\tan x = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$

c.- $3 + 5(x-1) + 4(x-1)^2 + (x-1)^3$

d.- $7 - 10(x+1) + 6(x+1)^2 - (x+1)^3$

PREGUNTA 3

a.- $1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{7x^3}{6} + \frac{25x^4}{24}$

b.- $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$

c.- $x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{30} +$

d.- $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}$

e.- $-x^2 - \frac{x^4}{6} - \frac{2x^6}{45}$

Capitulo 9

PREGUNTA 1

a.- CONVERGE

b.- DIVERGE

c.- CONVERGE

d.- CONVERGE

e.- DIVERGE. Ya que cuando n es múltiplo par de 6 el término es 1 y cuando es múltiplo impar de 6 es el término es -1

f.- CONVERGE a 3/2

g.- DIVERGE.

h.- CONVERGE a 12

i.- DIVERGE

j.- CONVERGE. Comparación limite.

k.- CONVERGE.

l.- CONVERGE a 4

m.- CONVERGE

n.- CONVERGE.

o.- CONVERGE ABSOLUTAMENTE

p.- CONVERGEN CONDICIONALMENTE.

PREGUNTA 2.

a.- Radio $[-1,1]$

b.- Radio $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

c.- Radio $(3, 5]$

d.- Radio Para todo (x) **e.- DIVERGE**

f.- Solo para $x = -1$

PUNTOS FINALES.

Sugerencia y recomendaciones.

1.- Se debe tener dominio y muy buen manejo de las series y sucesiones como también se debe aprender el desarrollo en serie de las funciones básicas.

2.- DEBE COMPROBAR las hipótesis de los teoremas y criterios para poder aplicar sus resultados, hay muchos profesores que considera malo un ejercicio si no se ha demostrado las hipótesis, evítese que le quiten puntos.

3.- Debe tener destreza en el cálculo del radio de convergencia.

4.- Para poder comparar una serie con otra por lo general se construye la otra serie a partir de la potencia más alta en numerador o denominador.

SIRVASE DE AYUDA PARA PRACTICAR "SERIES Y SUCESIONES" PARA EL PRIMER PARCIAL DE MATEMATICAS 4

CUALQUIER ERROR TIPOGRAFICO O DE REDACCION POR FAVOR AVISAR A magt_123@hotmail.com PARA SU CORRECCION. MENCIONE NUMERO DE PAG Y NUMERO DEL EJERCICIO QUE DICE Y QUE DEBERIA DECIR.

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA.

Purcell, Edwin J. CALCULO Octava edición, Editorial, Person Educación, México, 2001